Lösungen Inverse Probleme 2001

Frank Wübbeling

20. Juni 2001

Aufgabe 1: Seien $J_k(x)$ die Koeffizienten in der Laurent-Reihe

$$e^{x(z-1/z)/2} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} z^k J_k(x) \ .$$

Zeigen Sie:

$$J_k(x) = \frac{i^{-k}}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} e^{ix\cos\varphi - ik\varphi} d\varphi$$

<u>Bemerkung:</u> J_k ist die Bessel-Funktion 1. Art der Ordnung k.

Lösung: Nach den Formeln für die Koeffizienten der Laurentreihe gilt

$$\begin{aligned}
J_k(x) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{x(z-1/z)/2} z^{-k-1} dz \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} e^{x/2\,(e^{i\varphi}-e^{-i\varphi})} e^{-i(k+1)\varphi} i e^{i\varphi} d\varphi \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix\sin\varphi - ik\varphi} d\varphi \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix\cos\varphi - ik(\varphi+\pi/2)} d\varphi \\
&= \frac{i^{-k}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix\cos\varphi - ik\varphi} d\varphi
\end{aligned}$$

Aufgabe 2: Sei $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ und $f_1(x) = f(Ax+b)$ mit einer invertierbaren (n,n)-Matrix A und $b \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, daß

$$\hat{f}_1(\xi) = \frac{1}{|A|} e^{i\xi\cdot A^{-1}b} \hat{f}(A^{-T}\xi) \ .$$

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned}
\hat{f}_1(\xi) &= c\int f(Ax+b)e^{-ix\xi}dx \\
&= \frac{c}{|A|}\int f(x+b)e^{-ixA^{-t}\xi}dx \\
&= \frac{c}{|A|}\int f(x)e^{-i(x-b)A^{-t}\xi}dx \\
&= \frac{1}{|A|}e^{i\xi A^{-1}b}\hat{f}(A^{-t}\xi).
\end{aligned}$$

Aufgabe 3: Sei $f \in C(\mathbb{R}^1)$. Zeigen Sie: Für $\theta \in S^{n-1}$, $n \geq 2$ gilt

$$\int\limits_{S^{n-1}} f(\theta \cdot x)d\sigma(x) = |S^{n-2}| \int\limits_{-1}^{+1} f(t)(1-t^2)^{(n-3)/2}dt$$

mit $|S^{n-1}|$ die Oberfläche der Einheitssphäre in $\mathbb{R}^n$, also $|S^{n-1}| = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$.
Lösung: Wir betrachten zunächst S^{n-1+} mit den Punkten aus S^{n-1} mit positiver x_n-Komponente. Dann gilt für die Punkte $x_n = x_n(x_1,\ldots,x_{n-1}) = \sqrt{1-x_1^2-x_2^2-\ldots-x_{n-1}^2}$. Nach Definition des Oberflächenintegrals (siehe z.B. Bronstein, 8.5.1.2) gilt:

$$\begin{aligned}
\int_{S^{n-1+}} f(x)dx &= \int_{-1}^{1}\cdots\int_{-1}^{1} f(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n)\cdot \\
&\quad \sqrt{1+(dx_n/dx_1)^2+\ldots+(dx_n/dx_{n-1})^2}dx_1\cdots dx_n \\
&= \int_{-1}^{1}\cdots\int_{-1}^{1} f(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n)\frac{1}{\sqrt{1-x_1^2-\ldots-x_n^2}} \\
&= \int_0^{\pi}\ldots\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin^{n-2}\theta_{n-1}\ldots\sin\theta_3^2\sin\theta_2 d\theta_{n-1}\ldots d\theta_1
\end{aligned}$$

und damit

$$\int_{S^{n-1}} = \int_0^{\pi}\ldots\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin^{n-2}\theta_{n-1}\ldots\sin\theta_3^2\sin\theta_2 d\theta_{n-1}\ldots d\theta_1.$$

Für die Transformationsformel für Polarkoordinaten siehe Forster III, Seite 33: Definiere $G := D^t D$. Dann ist G eine Diagonalmatrix, und es gilt $\sqrt{\det G} = \det D$.
Das Integral ist unabhängig von $\theta \in S^{n-1}$. Wir wählen also $\theta = (0, \ldots, 0, 1)$ und damit $x \cdot \theta = \cos\theta_{n-1}$. Eingesetzt:

$$\begin{aligned}
\int_{S^{n-1}} f(\theta \cdot x) &= \int_0^\pi \cdots \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\cos\theta_{n-1}) \sin^{n-2}\theta_{n-1} \ldots \sin\theta_2 d\theta_1 \ldots d\theta_{n-1} \\
&= |S^{n-2}| \int_0^{2\pi} f(\cos\theta_{n-1}) \sin^{n-2} d\theta_{n-1} \\
&= |S^{n-2}| \int_{-1}^1 f(t)(1-t^2)^{(n-3)/2} dt
\end{aligned}$$

Aufgabe 4: Sei $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 2$. Zeigen Sie für $s > 0$:

$$\int\limits_{x_n = s} f(x)dx = \int\limits_{S_+^{n-1}} f\left(\frac{sx}{x_n}\right) \frac{s^{n-1}}{x_n^n} d\sigma(x)$$

mit $S_+^{n-1} = \{x \in S^{n-1} : x_n > 0\}$.

Lösung: Wir projizieren die Hyperebene durch $\omega := \frac{x}{|x|}$ auf S_+^{n-1}, die Inverse Abbildung ist gerade $x = \frac{s}{\omega_n}\omega$. Für $l < n$ gilt $x_l = s\omega_l/\omega_n$ und $\omega_n = \sqrt{1 - \omega_1^2 - \ldots - \omega_{n-1}^2}$. Für $k, l < n$ gilt damit

$$\frac{\partial x_l}{\partial \omega_l} = \frac{s}{\omega_n} + \frac{s\omega_l^2}{\omega_n^2}$$

und für $l \neq k$

$$\frac{\partial x_l}{\partial \omega_k} = \frac{s\omega_l\omega_k}{\omega_n^3}.$$

Setze nun $a := \frac{1}{\omega_n}(\omega_1, \ldots, \omega_{n-1})$. Dann ist die Funktionaldeterminante gerade $(I + aa^t)$, und mit der Formel $\det(I + aa^t) = 1 + |a|^2$ gilt

$$\begin{aligned}
\int_{x_n = s} f(x)dx &= \int_{\omega_1^2 + \ldots + \omega_n^2 < 1} f(\frac{s}{\omega_n}\omega) \left|\frac{\partial(x_1, \ldots, x_{n-1})}{\partial(\omega_1, \ldots, \omega_{n-1})}\right| d\omega_1 \ldots d\omega_n \\
&= \int_{S_+^{n-1}} f(\frac{s\omega}{\omega_n}) \frac{s^{n-1}}{\omega_n^{n+1}} \omega_n d\sigma(\omega).
\end{aligned}$$

Beweis der Hilfsformel: Sei U eine unitäre Matrix mit $Ua = |a|e_1$. Dann ist

$$\begin{aligned}\det(I + aa^t) &= \det(U(I + aa^t)U^t) \\ &= \det(I + |a|^2 e_1 e_1^t) \\ &= 1 + |a|^2.\end{aligned}$$

Aufgabe 5: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die Funktion der Gestalt

$$f(x) = p(x)e^{-x^2/2}$$

mit einem Polynom p vom Grade n. Zeigen Sie, daß $\hat{f}$ die gleiche Gestalt hat.

Lösung:
Es gilt

$$\begin{aligned}\hat{f}(\xi) &= (2\pi)^{-n/2} \int p(x)e^{-x^2/2-ix\xi}dx \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int p(x)e^{-\frac{1}{2}((x+i\xi)^2+\xi^2)}dx \\ &= (2\pi)^{-n/2}e^{-\xi^2/2} \int p(x-i\xi)e^{-x^2/2}dx \\ &= e^{-\xi^2/2} \sum \alpha_k \xi^k\end{aligned}$$

denn $p(x - i\xi)$ ist ein Polynom in ξ und damit auch das Integral.
Einfacher: Sei ohne Einschränkung $p(x) = x^\alpha$. Dann gilt

$$(x^\alpha \widehat{e^{-x^2/2}})(\xi) = i^{|\alpha|} D^\alpha (\widehat{e^{-x^2/2}})(\xi) = i^{|\alpha|} D^\alpha (e^{-\xi^2/2})$$

und die Ableitung ist natürlich wieder ein Polynom.

Aufgabe 6: Sei $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$ radial, d.h. $f(x) = f_0(|x|)$. Zeigen Sie: Dann ist auch $\hat{f}$ radial, und

$$\hat{f}(\xi) = |\xi|^{(2-n)/2} \int_0^\infty f_0(r) r^{n/2} J_{(n-2)/2}(r|\xi|)dr\ .$$

Lösung:

Nach Vorlesung gilt

$$\int_{S^{n-1}} e^{ir\theta\cdot\omega} d\omega = (2\pi)^{n/2}(r\rho)^{(2-n)/2} J_{(n-2)/2}(r)$$

und damit mit $\xi = |\xi|\theta$

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= (2\pi)^{-n/2} \int f(x)e^{-ix\xi}dx \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int_0^\infty r^{n-1} f_0(r) \int_{S^{n-1}} e^{ir|\xi|\theta\cdot\omega} d\omega \\ &= |\xi| \int_0^\infty f_0(r) r^{n/2} J_{(n-2)/2}(r|\xi|)dr. \end{aligned}$$

Aufgabe 7: Sei $\mathcal{S}$ der Schwartz'sche Raum der Funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\operatorname*{Sup}_{\mathbb{R}^n} \ |x^\alpha D^\beta f(x)| < \infty$$

für alle α, $\beta \geq 0$. Zeigen Sie: Ist $f \in \mathcal{S}$, so auf $\hat{f} \in \mathcal{S}$.

Lösung: Sei $f \in \mathcal{S}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} |\xi^\alpha D^\beta \hat{f}(\xi)| &= |(x^\beta D^\alpha f)\hat{}(\xi)| \\ &= (2\pi)^{-n/2} |\int x^\beta D^\alpha f(x) e^{-ix\xi} dx| \\ &\leq C \int \min(1, |x|^{n+1}) \\ &\leq C' \end{aligned}$$

Aufgabe 8: Sei für $\varepsilon > 0$ $f_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & , \quad |x| \geq \varepsilon \\ 0 & , \quad \text{sonst .} \end{cases}$$

Zeigen Sie:

1) $f_\varepsilon \in L_2(\mathbb{R}^1)$

2) $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \hat{f}_\varepsilon(\xi) = -i \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \operatorname{sgn}(\xi),\ \xi \neq 0.$

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned}\int f_\epsilon^2(x)dx &= 2\int_\epsilon^\infty \frac{1}{x^2}dx \\ &= \frac{2}{\epsilon}\end{aligned}$$

und (weil die Fouriertransformierte existieren muß!)

$$\begin{aligned}\hat{f}_\epsilon(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{|x|>\epsilon}\frac{1}{x}e^{-ix\xi}dx \\ &= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{|x|>\epsilon}\frac{\sin x\xi}{x}dx \\ &\mapsto -\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\frac{\sin x}{x}dx\, sgn(\xi) \\ &= -i\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} sgn(\xi).\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung gilt wegen $\widehat{sinc} = \chi$.

Aufgabe 9: Sei $n = 2$. Man zeige folgende Formeln in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$:

(a) div $\frac{x}{|x|^2} = 2\pi\delta$

(b) div $\frac{x^\perp}{|x|^2} = 0$, $\quad x^\perp = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$

Lösung:
Wir benutzen den Gaußschen Integralsatz in der Form

$$\int_\Omega \mathrm{div u}\cdot \mathrm{vdx} = -\int_\Omega \nabla \mathrm{v}\cdot \mathrm{udx} + \int_{\partial\Omega}\nu(\mathrm{x})\mathrm{v}(\mathrm{x})\mathrm{u}(\mathrm{x})\mathrm{dx}.$$

(Beweis: Wende den Gaußschen Integralsatz an auf uv, v eine skalare Funktion).
Damit ist

$$\frac{x}{|x|^2}\cdot\nabla\varphi dx \quad = \quad \lim_{\epsilon\mapsto 0}\int_{|x|\geq\epsilon}\frac{x}{|x|^2}\cdot\nabla\varphi d\sigma(x)$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{\epsilon \mapsto 0} \left(\int_{|x| \geq \epsilon} \operatorname{div} \frac{\mathrm{x}}{|\mathrm{x}|^2} \varphi \mathrm{dx} + \int_{|\mathrm{x}|=\epsilon} \frac{\mathrm{x} \cdot \nu}{|\mathrm{x}|^2} \varphi \mathrm{d}\sigma(\mathrm{x}) \right) \\
&= 2\pi\varphi(0)
\end{aligned}
$$

denn der div verschwindet, und $\nu = \frac{x}{|x|}$.
Für $x^\perp$ steht in der letzten Gleichung $x^\perp \cdot \nu$, und der Term verschwindet immer.

Aufgabe 10: Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt mit glattem Rand, und sei χ_K die charakteristische Funktion von K.
Zeigen Sie: In $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \chi_K = -\nu_i \delta_{\partial K} \ ,$$

wobei ν_i die i-te Komponente der äußeren Normalen auf ∂K ist.

Lösung:
Wir wenden den Gaußschen Integralsatz an wie oben für $u = e_1$ und erhalten

$$\int_\Omega \varphi_{x_i} dx = - \int_{\partial\Omega} \nu_i(x) \varphi(x) dx$$

und das ist die Aussage der Aufgabe.

Aufgabe 11: Zeigen Sie, daß für jedes $h \in C^2(\mathbb{R}^1)$

$$u(x,t) = \frac{h(t - |x|)}{|x|}$$

eine Lösung der Wellengleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u$ in $(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^1$ ist.

Lösung:
Zum Beispiel mit Maple.

Aufgabe 12: Für $z = x + iy$ sei $\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$.
Zeigen Sie:

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} \frac{1}{z} = \pi\delta$$

Lösung:
Wir schreiben

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x_1 + ix_2} = \frac{x_1 - ix_2}{|x|^2}.$$

Durch Ausrechnen erhält man

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} \frac{1}{z} = \frac{1}{2}(\mathrm{div}\frac{\mathrm{x}}{|\mathrm{x}|} + \mathrm{i}\,\mathrm{div}\frac{\mathrm{x}^\perp}{|\mathrm{x}|^2}) = \pi\delta$$

nach Aufgabe 9.

Aufgabe 13: Sei $(R_\theta f)(x) = (Rf)(\theta, x)$. Zeigen Sie, daß für f, $g \in C_0(\mathbb{R}^n)$

$$R_\theta(f * g) = R_\theta f * R_\theta g \ ,$$

wobei links die Faltung in $\mathbb{R}^n$, rechts die Faltung in $\mathbb{R}^1$ gemeint ist.

Lösung:
Es gilt:

$$\begin{aligned} (R_\theta(f * g))\widehat{\ }(\sigma) &= (f * g)\widehat{\ }(\sigma \cdot \theta) \cdot (2\pi)^{(n-1)/2} \\ &= \hat{f}(\sigma \cdot \theta) \cdot \hat{g}(\sigma \cdot \theta)(2\pi)^{n-1/2} \\ &= (R_\theta f)\widehat{\ }(\sigma) \cdot (R_\theta g)\widehat{\ }(\sigma)(2\pi)^{-1/2} \\ &= ((R_\theta f) * (R_\theta g))(\sigma) \end{aligned}$$

Aufgabe 14: Für $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ sei

$$(Pf)(\theta, x) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} f(x + t\theta)dt \ , \qquad x \in \theta^\perp \ , \quad \theta \in S^{n-1} \ .$$

Zeigen Sie:

$$((Pf)^\wedge(\theta, \cdot))(\xi) = (2\pi)^{1/2}\hat{f}(\xi) \ , \qquad \xi \in \theta^\perp \ ,$$

wo links die $(n-1)$-dimensionale Fourier-Transformation in $\theta^\perp$ und rechts die n-dimensionale Fourier-Transformation steht.

Lösung:

Es gilt

$$(Pf)(\theta, x) = \int_{I\!R} f(x + t \cdot \theta)dt$$

und damit

$$\begin{aligned}
(Pf)\check{}(\xi) &= \int_{\theta^\perp} e^{-ix\xi} Pf(\theta, x)dx(2\pi)^{-(n-1)/2} \\
&= \int_{\theta^\perp} e^{-ix\xi} \int_{I\!R} f(x + t\theta)dtdx(2\pi)^{-(n-1)/2} \\
&= \int_{I\!R^n} e^{-i(x+t\theta)\cdot\xi} f(x + t\theta)dtdx(2\pi)^{-(n-1)/2} \\
&= (2\pi)^{1/2} \hat{f}(\xi).
\end{aligned}$$

Beachte: x, ξ sind in $\theta^\perp$ und damit $\theta \cdot \xi = 0$.

Aufgabe 15: Mit $(P_\theta f)(x) = (Pf)(\theta, x)$ gilt für $f,\, g \in C_0(\mathbb{R}^n)$

$$P_\theta(f * g) = (P_\theta f) * (P_\theta g) \ ,$$

wo links die Faltung in $\mathbb{R}^n$, rechts die in $\theta^\perp$ gemeint ist.

Lösung:
Es gilt

$$\begin{aligned}
(P_\theta(f * g))\check{}(\xi) &= (f * g)\check{}(\xi)(2\pi)^{1/2} \\
&= \hat{f}(\xi) \cdot \hat{g}(\xi)(2\pi)^{(n+1)/2} \\
&= (P_\theta f)\check{}(\xi) \cdot (P_\theta g)\check{}(\xi)(2\pi)^{(n-1)/2} \\
&= ((P_\theta f) * (P_\theta g))\check{}(\xi).
\end{aligned}$$

Aufgabe 16: Sei $g \in C_0(S^{n-1} \times \mathbb{R}^1)$ gerade. Zeigen Sie:

$$(R^* g)^\wedge(\xi) = 2(2\pi)^{(n-1)/2} |\xi|^{1-n} \hat{g}(\frac{\xi}{|\xi|}, |\xi|) \ .$$

Lösung:

Nach Definition von R^* und der Parsevalschen Gleichung

$$\int \hat{f}\hat{g} = \int fg$$

gilt für $w \in S$

$$\begin{aligned}
(R^*g)\check{}(w) &= \int_{\mathbb{R}^n} (R^*g)(x)\hat{w}(x)dx \\
&= \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} g(\theta,s)(R\hat{w})(\theta,s)dsd\theta \\
&= \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\theta,\sigma)(R\hat{w})\check{}(\theta,\sigma)d\sigma d\theta \\
&= (2\pi)^{(n-1)/2} \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\theta,\sigma)w(\sigma\theta)d\sigma d\theta \\
&= 2(2\pi)^{(n-1)/2} \int_{S^{n-1}} \int_0^\infty \hat{g}(\theta,\sigma)w(\sigma\theta)d\sigma d\theta \\
&= 2(2\pi)^{(n-1)/2} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}(\xi/|\xi|,|\xi|)|\xi|^{n-1}w(\xi)d\xi
\end{aligned}$$

und daraus folgt die Behauptung.

Aufgabe 17: Sei $f \in C_0(\mathbb{R}^2)$ und $g = Rf$. Sei

$$\begin{aligned}
g(\theta,s) &= \sum_\ell g_\ell(s)e^{i\ell\varphi} \quad , \quad \theta = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} , \\
f(r\theta) &= \sum_\ell f_\ell(r)e^{i\ell\varphi} \quad .
\end{aligned}$$

Zeigen Sie

$$f_\ell(r) = -\frac{1}{\pi}\int_r^\infty \left(s^2-r^2\right)^{-1/2} T_{|\ell|}\left(\frac{s}{r}\right) g_\ell'(s)ds$$

mit dem Tschebyscheff-Polynom 1. Art T_ℓ, also $T_\ell(x) = \cos(\ell \arccos x)$, $|x| \leq 1$.

Lösung: Wir benutzen das Funk-Hecke-Theorem in zwei Dimensionen

$$\int_0^{2\pi} h(\cos\varphi)e^{il\varphi}d\varphi = 2\int_{-1}^1 h(t)T_{|l|}(t)(1-t^2)^{-1/2}dt$$

und eine alte Übungsaufgabe für die Integration entlang einer Hyperebene. Dann gilt mit $\theta = \theta(\varphi)$:

$$\int_{x\cdot\theta=s} f(x)dx = \int_0^\pi f(\frac{s}{\theta\cdot\omega}\cdot\omega)\frac{s}{(\theta\cdot\omega)^2}d\psi$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^\pi \sum_l f_l(\frac{2}{\theta \cdot \omega}) e^{il\psi} \frac{s}{(\theta\cdot\omega)^2} d\psi \\
&= \sum e^{il\varphi} \int_0^\pi f_l(\frac{s}{\cos\psi}) \frac{s}{\cos^2\psi} e^{il\psi} d\psi \\
&= \sum e^{il\varphi} \int_0^1 f_l(\frac{s}{t}) \frac{s}{t^2} T_{|l|}(t)(1-t^2)^{-1/2} dt \\
&= \sum e^{il\varphi} \int_s^\infty f_l(r) \frac{r^2}{s} T_{|l|}(\frac{s}{r})(1-t^2)^{-1/2} \frac{s}{r^2} dt
\end{aligned}
$$

wobei $r = s/t$ und damit $dt = s/r^2 dr$ und $\omega = \omega(\psi)$.

Aufgabe 18: Sei für $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ und $\mu \in \mathbb{R}$

$$g(\theta, s) = (T_\mu f)(\theta, s) = \int\limits_{\mathbf{R}^1} e^{\mu t} f(s\theta + t\theta^\perp) dt$$

die exponentielle Radon-Transformation. Zeigen Sie:

(a) $(T_\mu f)^\wedge(\theta, \sigma) = (2\pi)^{1/2} \hat{f}(\sigma\theta + i\mu\theta^\perp)$.

(b) Sei $g(\theta, \sigma) = (T_\mu f)^\wedge(\theta, i\sigma)$. Dann gilt

$$g(\theta(\varphi - \alpha), \sigma) = g(\theta(\varphi + \alpha), -\sigma) \ ,$$

$$\alpha = \arcsin \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + \mu^2}} \quad , \qquad \theta(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} .$$

(c)

$$\mu = \frac{\int \frac{\partial}{\partial\varphi} g(\theta, s) ds}{\int s g(\theta, s) ds} .$$

Lösung:
zu (a): Es gilt

$$
\begin{aligned}
(T_\mu f)\hat{}(\theta, \sigma) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\sigma s} \int_{\mathbb{R}} f(s\theta + t\theta^\perp) e^{\mu t} dt ds \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i(\sigma s + i\mu t)} f(s\theta + t\theta^\perp) dt ds \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}^2} f(x) e^{-i(\sigma x \cdot \theta + i\mu x \cdot \theta^\perp)} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}^2} f(x) e^{-ix(\sigma\theta + i\mu\theta^\perp)} dx \\
&= \sqrt{2\pi} \hat{f}(\sigma\theta + i\mu\theta^\perp)
\end{aligned}
$$

zu(b): nach (a) ist die Gleichung $g(\theta, s) = g(\theta', -s)$ richtig, falls

$$\sigma\theta + \mu\theta^\perp = \sigma\theta' + \mu\theta'^\perp.$$

Sei ohne Einschränkung $\varphi = 0$. Dann lautet die erste Komponente dieser Gleichung mit $c = \cos\alpha$, $s = \sin\alpha$

$$\sigma c - \mu s = -\sigma c + \mu s$$

oder

$$\sigma c = \mu s$$

und damit wegen $c^2 + s^2 = 1$

$$\sigma^2(1 - s^2) = \mu^2 s^2$$

oder

$$s^2 = \frac{\sigma^2}{\mu^2 + \sigma^2}.$$

zu (c):
Für g muß die Definition von oben eingesetzt werden, nicht der von (b). Der folgende Beweis stammt aus dem Originalartikel von Hertle (Math.Z. 1988):
Definiere $h(\theta, \sigma) = \hat{f}(\sigma\theta + i\mu\theta^\perp) = \hat{g}(\theta, \sigma)$. Dann gilt

$$\frac{\partial h}{\partial \sigma} = \theta \cdot (\nabla \hat{f})(\sigma\theta + i\mu\theta^\perp)$$

und damit

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial \varphi} &= \sigma\theta^\perp \cdot (\nabla \hat{f}) - i\mu\theta \cdot (\nabla \hat{f}) \\ &= \sigma \cdot \theta^\perp \cdot (\nabla \hat{f}) - i\mu \frac{\partial h}{\partial \sigma}. \end{aligned}$$

Setze nun $\sigma = 0$, und es ergibt sich

$$\mu = i \frac{\frac{\partial h}{\partial \varphi}(\theta, 0)}{\frac{\partial h}{\partial \sigma}(\theta, 0)} = \frac{\int \frac{\partial g}{\partial \varphi}(\theta, s) ds}{\int s g(\theta, s) ds}.$$

Aufgabe 19: Sei M die Mellin-Transformation

$$(Mf)(s) = \int_0^\infty f(x) x^{s-1} dx \ .$$

Zeigen Sie

$$\begin{aligned} (Mf')(s) &= (1-s)(Mf)(s-1) \\ (Mx^p f)(s) &= (Mf)(s+p) \\ (M(f * g))(s) &= MfMg \ , \end{aligned}$$

wobei

$$(f * g)(x) = \int\limits_0^\infty f(r) g\left(\frac{x}{r}\right) \frac{dr}{r} \quad .$$

Aufgabe 20: Sei T_ℓ das Tschebyscheff-Polynom 1. Art vom Grad ℓ, also

$$T_\ell(x) = \cos(\ell \arccos x) \ , \quad |x| \leq 1 \ .$$

Zeigen Sie: Für $|x| \geq 1$ gilt

$$|T_\ell(x)| \geq \frac{1}{2}\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^\ell \ .$$

Lösung:
Für $|x| > 1$ ist $\arccos x$ rein imaginär. Damit gilt

$$\begin{aligned}
T_l(x) &= cos(l \arccos x) \\
&= \frac{1}{2}(e^{il \arccos x} + e^{-il \arccos x}) \\
&\geq \frac{1}{2}(e^{i \arccos x})^l \\
&= \frac{1}{2}(x + i \sin(\arccos x))^l \\
&= \frac{1}{2}(x + i\sqrt{1 - x^2})^l \\
&= \frac{1}{2}(x + \sqrt{x^2 - 1})^l
\end{aligned}$$

Aufgabe 21: Sei für $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ und $x,\, y \in \mathbb{R}^3$

$$(Df)(x, y) = \int\limits_{\mathbf{R}^1} f(x + ty) dt \ .$$

Sei $g = Df$. Zeigen Sie:

(a) g erfüllt die Differentialgleichung von *John*:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial y_j} - \frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial y_i} = 0 \ , \qquad i, j = 1, 2, 3 \ .$$

(b) Sei $\hat{g}$ die Fourier-Transformation von g bezüglich der zweiten Variablen. Dann ist $\hat{g}(\cdot, \eta)$ konstant auf allen Ebenen, die zu η senkrecht sind.

Lösung:
Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial y_j}(x,y) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j}(x+ty)tdt \\ &= \frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial y_i}(x,y). \end{aligned}$$

Mit den Rechenregel der Fouriertransformation gilt

$$\begin{aligned} \eta_i \frac{\partial}{\partial x_j}\hat{g} &= i\widehat{\frac{\partial^2 g}{\partial x_i}\partial y_j} \\ &= i\widehat{\frac{\partial^2 g}{\partial x_i}\partial y_j} \\ &= \eta_j \frac{\partial}{\partial x_i}\hat{g}. \end{aligned}$$

Damit ist das Kreuzprodukt von μ und $\nabla \hat{g}(\dot{;}\eta)$ Null, also sind die Vektoren parallel. Damit verschwinden alle Richtungsableitungen in Richtung $\eta^{\perp}$, die Funktion ist also konstant in diesen Richtungen.

Aufgabe 22: Sei $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$. Zeigen Sie: Für $m = 0, 1, 2, \ldots$ ist

$$p_m(\theta) = \int\limits_{\mathbf{R}^1} s^m (Rf)(\theta, s) ds$$

ein Polynom in θ, welches homogen vom Grade m ist.

Lösung:
Es gilt

$$\begin{aligned} p_m(\theta) &= \int_{\mathbb{R}} s^m (Rf)(\theta,s)ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} s^m \int_{x\cdot\theta=s} f(x)dx\, ds \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (x\cdot\theta)^m f(x)dx \end{aligned}$$

und das ist ein homogenes Polynom in θ vom Grade m.

Aufgabe 23: Sei $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie: Für $m = 0, 1, 2, \dots$ ist

$$q_m(y) = \int\limits_{\theta^\perp} (x \cdot y)^m (Pf)(\theta, x) dx$$

auf $\theta^\perp$ ein Polynom, welches homogen vom Grade m und unabhängig von θ ist.

Lösung:
Es fehlt die zusätzliche Voraussetzung $y \in \theta^\perp$, andernfalls ist das Polynom nicht unabhängig von θ. Sei P_θ wieder die Projektion auf $\theta^\perp$.

$$\begin{aligned} q_m(y) &= \int_{\theta^\perp} (x \cdot y)^m (Pf)(\theta, x) dx \\ &= \int_{\theta^\perp} (x \cdot y)^m \int_{\mathbb{R}} f(x + t \cdot \theta) dt\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(z)(P_\theta z \cdot y)^m dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(z)(z \cdot y)^m dz \end{aligned}$$

Aufgabe 24: Sei $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $h(x) = 2|x|^{1-n}$. Zeigen Sie:

$$P^* P f = h * f$$

Lösung:
Wir leiten zunächst noch einmal die Formel für P^* her. Es gilt

$$Pf(\theta, x) = \int_{\mathbb{R}} f(x + t \cdot \theta) dt$$

und damit

$$\begin{aligned} (Pf, g) &= \int_{S^{n-1}} \int_{\theta^\perp} (Pf)(\theta, x) g(\theta, x) dx d\theta \\ &= \int_{S^{n-1}} \int_{\theta^\perp} \int_{\mathbb{R}} f(x + t \cdot \theta) g(\theta, x) dt\, dx\, d\theta \\ &= \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n} f(z) g(\theta, P_\theta z) dz\, d\theta \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(z) \int_{S^{n-1}} g(\theta, P_\theta z) d\theta\, dz \end{aligned}$$

wobei $P_\theta z$ die Projektion von z auf $\theta^\perp$ ist. Insbesondere ist die Differenz von z und $P_\theta z$ ein vielfaches von θ. Damit gilt

$$\begin{aligned}
(P^*P)f(x) &= \int_{S^{n-1}} (Pf)(\theta, P_\theta x) d\theta \\
&= \int_{S^{n-1}} \int_{I\!R} f(P_\theta x + t\cdot\theta) dt\, d\theta \\
&= \int_{S^{n-1}} \int_{I\!R} f(x + t\cdot\theta) dt\, d\theta \\
&= 2\int_{S^{n-1}} \int_{I\!R^+} f(x + t\cdot\theta) dt\, d\theta \\
&= \int_{I\!R^n} f(x-z)\cdot 2||z||^{1-n} dz \\
&= (f*h)(x)
\end{aligned}$$

mit der obigen Definition.

Aufgabe 25: Für eine Funktion $f \in C(S^2)$ sei

$$(Qf)(\xi, s) = \int\limits_{\substack{\xi\cdot\theta = s \\ \theta\in S^2}} f(\theta) d\sigma(\theta)\ , \quad \xi \in \mathbb{R}^3\ , \ \ s \in \mathbb{R}^\wedge$$

mit dem Oberflächenmaß σ auf S^1. Zeigen Sie:

(a) Ist $s = 0$ und f gerade (also $f(-\theta) = f(\theta)$), dann gilt

$$(Qf)(\xi, 0) = (RF)\left(\frac{\xi'}{|\xi'|}, -\frac{\xi_3}{|\xi'|}\right)\ , \quad \xi = \begin{pmatrix} \xi' \\ \xi_3 \end{pmatrix}$$

mit der zweidimensionalen Radon-Transformation R und

$$F\begin{pmatrix} \frac{x'}{x_3} \end{pmatrix} = 2f(x', x_3)x_3^2\ , \quad x_3 = \sqrt{1-|x'|^2}\ .$$

(b) Ist $\xi_3 = 0$ und f gerade bezüglich x_3, so ist

$$(Qf)(\xi', 0, s) = (RF)(\xi', s)\ ,$$

$$F(x') = 2f(x', x_3)/x_3\ , \quad x_3 = \sqrt{1-|x'|^2}\ .$$

Lösung:

$$(Qf)(\xi,0) = 2\int_{\xi'\cdot x' = -x_3\xi_3} f(x',x_3)\frac{dx'}{dx_3}$$
$$=$$

Aufgabe 26: Sei A eine nichtsinguläre (n,n)-Matrix und $a \in \mathbb{R}^n$. Sei $f(x) = f_0(Ax+a)$ mit $f_0 \in C_0(\mathbb{R}^n)$. Sei $B = (A^T)^{-1}$.
Zeigen Sie:

$$(Rf)(\theta,s) = \frac{|\det(B)|}{|B\theta|}(Rf_0)\left(\frac{B\theta}{|B\theta|}\ ,\ \frac{a\cdot B\theta + s}{|B\theta|}\right)$$

Lösung:
Die Lösung der Aufgabe ohne Verwendung der δ-Distribution ist erstaunlich schwierig. Insbesondere ist im allgemeinen

$$\int_{x\cdot\theta=0} f(Ax)dx \neq \frac{1}{\det A}\int_{A^{-1}x\cdot\theta=0} f(x)dx$$

denn die Integration geht über einen $n-1$-dimensionalen Raum, und damit darf keine n-dimensionale Transformationsformel angewandt werden. Statt dessen muß man die Einschränkung von A auf $\theta^\perp$ betrachten und dessen Determinante berechnen. Einfacher geht es mit der δ-Distribution. Wir sagen zunächst, was wir mit der später benutzen Notation meinen:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\delta(s - x\cdot\theta)dx &= \int_{y\cdot\theta=0}\int_{-\infty}^{\infty} f(y+t\theta)\delta(s-t)dt\,dy \\
&= \int_{y\cdot\theta=0} \delta(f(y+(\cdot+s)\theta))dy \\
&= \int_{y\cdot\theta=s} f(x)dy \\
&= Rf(\theta,s).
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir natürlich benutzt, daß $|\theta| = 1$, denn sonst gilt schon die erste Gleichung nicht. Damit ist die folgende Rechnung gerechtfertigt:

$$\begin{aligned}
(Rf)(\theta,s) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\delta(s - x\cdot\theta)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f_0(Ax+a)\delta(s - x\cdot\theta)dx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}^n} f_0(y)\delta(s-(A^{-1}(y-a))\cdot\theta)\frac{1}{|\det A|}dy \\
&= |\det B| \int_{\mathbb{R}^n} f_0(y)\delta(s+a\cdot B\theta - y\cdot B\theta)dy \\
&= \frac{|\det B|}{|B\theta|}\int_{\mathbb{R}^n} f_0(y)\delta\left(\frac{s+a\cdot B\theta}{|B\theta|} - y\cdot\frac{B\theta}{|B\theta|}\right)dy \\
&= \frac{|\det B|}{|B\theta|}(Rf_0)(\frac{B\theta}{|B\theta|},\frac{s+a\cdot B\theta}{|B\theta|}).
\end{aligned}
$$

In the last but one equation we used that δ is homogeneous of degree 1 since $\delta(\lambda f) = \lambda f(0) = \lambda\delta(f)$, thus δ as a function is homogeneous of degree -1.

Aufgabe 27: Zeigen Sie: Für $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^1)$ gilt

$$
\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\mathbf{R}^1}\frac{\varphi(x)}{x\pm i\varepsilon}dx = ⨏\frac{\varphi(x)}{x} \pm i\pi\varphi(0)\ .
$$

Lösung:
Sei R so groß dass $\operatorname{supp}\varphi \subset [-R,R]$.

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}}\frac{\varphi(x)}{x+i\epsilon} \quad &= \int_{-R}^{R}\frac{x\varphi(x)}{x^2+\epsilon^2}dx - i\int_{-R}^{R}\frac{\epsilon\varphi(x)}{x^2+\epsilon^2}dx \\
&= \int_{-R}^{R}\frac{(\varphi(x)-\varphi(0))x}{x^2+\epsilon^2}dx - i\epsilon\int_{-R}^{R}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)-\varphi'(0)x}{x^2+\epsilon^2} - i\epsilon\int_{-R}^{R}\frac{\varphi(0)}{x^2+\epsilon^2}dx \\
&=_{\epsilon\mapsto 0} ⨏\frac{\varphi(x)}{x}dx + 0 - i\pi\varphi(0)
\end{aligned}
$$

where in the last equation we set $x=\epsilon y$ and use $\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{x^2+1} = \pi$.

Aufgabe 28: Sei $\mathcal{S}$ der Operator der sphärischen Mittel, also

$$
(\mathcal{S}f)(x',r) = r^{1-n}\int_{|y|=r} f(x'+y)d\sigma(y)\ .
$$

Zeigen Sie: Die Adjungierte $\mathcal{S}^*$ von $\mathcal{S}$ als Operator $L_2(\mathbb{R}^n) \to (\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}^1_+)$ mit dem inneren Produkt

$$
(g,h)_{L_2(\mathbf{R}^{n-1}\times\mathbf{R}^1_+)} = \int_0^\infty\int_{\mathbf{R}^{n-1}} r^{n-1}g(x',r)h(x',r)dx'dr
$$

ist gegeben durch

$$(\mathcal{S}^* g)(x) = \int\limits_{y_n=0} g(y, |x-y|) dy \ .$$

Aufgabe 29: Sei $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ gerade in x_n und $g = \mathcal{S} f$. Zeigen Sie:

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{2}(2\pi)^{1-n} |\xi_n| |\xi|^{n-2} (\mathcal{S}^* g)^\wedge(\xi) \ .$$

(Dies ist Satz III.4.2. Benutzen Sie Satz III.4.1)

Aufgabe 30: Sei R die n-dimensionale Radon-Transformation und $W = R^* w$ mit $w \in C_0(\mathcal{S}^{n-1} \times \mathbb{R}^1)$. Zeigen Sie: Für $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$W \star f = R^*(w \star Rf) \ ,$$

wo links die n-dimensionale, rechts die 1-dimensionale Faltung steht.